10. Lineární zobrazení

Definice: Nechť V a W jsou dva vektorové prostory. Zobrazení $Z: V \longrightarrow W$ (čti: zobrazení Z prostoru V do prostoru W) se nazývá **lineární zobrazení**, právě když (pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ z V a každé a z R) platí:

$$Z_1: Z(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = Z(\boldsymbol{u}) + Z(\boldsymbol{v})$$
$$Z_2: Z(a\boldsymbol{u}) = aZ(\boldsymbol{u})$$

Příklad 1: Nechť A je matice typu m x n. Pak definujme zobrazení
$Z_A: R^n \longrightarrow R^m$ takto:

$$Z_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}\,,$$

pro všechny sloupcově psané vektory z R^n. Dokažte, že zobrazení Z_A je lineární.

Řešení: Nechť $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou vektory z R^n a a je z R. Pak pomocí algebry matic dostaneme:

$$Z_A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v} = Z_A(\boldsymbol{u}) + Z_A(\boldsymbol{v})$$
$$Z_A(a\boldsymbol{v}) = A(a\boldsymbol{v}) = aA(\boldsymbol{v}) = aZ_A(\boldsymbol{v}).$$

Dokázali jsme obě podmínky z definice, a zobrazení Z_A je proto lineární.

Definice: Nechť A je matice typu m x n. Pak zobrazení $Z: R^n \longrightarrow R^m$ definované formulí $Z_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ se nazývá **maticové zobrazení** odpovídající matici A.

Věta: Nechť Z: $R^n \longrightarrow R^m$ je lineární zobrazení, kde vektory z R^n píšeme sloupcově. Pak platí:

- Existuje matice A typu m x n taková, že Z($\boldsymbol{v}$) = A$\boldsymbol{v}$ pro všechny sloupcově psané vektory $\boldsymbol{v}$ z R^n.

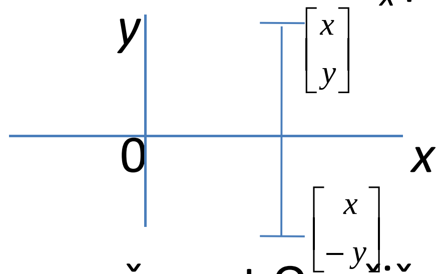
- Sloupce matice A jsou vektory Z($\boldsymbol{e}_1$), Z($\boldsymbol{e}_2$), …, Z($\boldsymbol{e}_n$), kde množina {$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$} je standardní báze prostoru R^n. Proto můžeme matici A zapsat následovně:.

$$A = [Z(\boldsymbol{e}_1)\ Z(\boldsymbol{e}_2)\ \dots\ Z(\boldsymbol{e}_n)].$$

Příklad 2: Uvažujme v rovině (se soustavou souřadnic) osovou souměrnost podle osy x. Jedná se tak vlastně o určité zobrazení $O_x: R^2 \longrightarrow R^2$. Vyjádřeme toto zobrazení v maticové formě:

Řešení: Vektory z R^2 zapíšeme sloupcově. Pak můžeme zobrazení O_x popsat následovně (viz obr.):

$$O_x: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} .$$



Standardní bází v R^2 je množina $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Osová souměrnost O_x přiřadí těmto vektorům následující vektory

$$O_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Předpis pro zobrazení je $O_x \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

_

Příklad 3: Uvažujme v dané rovině (se soustava souřadnic) osovou souměrnost podle osy $y = x$. Tuto osu označme o. Jedná se tak o určité zobrazení O_o: $R^2 \longrightarrow R^2$. Vyjádřete toto zobrazení opět v maticové formě:

Řešení: Vektory z R^2 zapíšeme sloupcově. Pak můžeme zobrazení O_o popsat následovně:

$$O_o \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad .$$

Sestrojíme matici tohoto zobrazení:

$$O_o \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; O_o \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a proto maticová formule pro toto zobrazení je:

$$O_o \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Příklad 4: Uvažujme v dané rovině (se soustavou souřadnic) otočení kolem počátku soustavy souřadnic o úhel α proti směru pohybu hodinových ručiček (viz obr.). Toto zobrazení označme K_α. Jedná se opět o zobrazení: $R^2 \longrightarrow R^2$. Vyjádřete toto zobrazení v maticové formě.

Řešení: Osy *x*, *y* se otočí kolem počátku soustavy souřadnic proti směru pohybu hodinových ručiček o úhel α. Dostaneme tak nové osy *x´* a *y´*. Obrazy standardních vektorů budou následující:

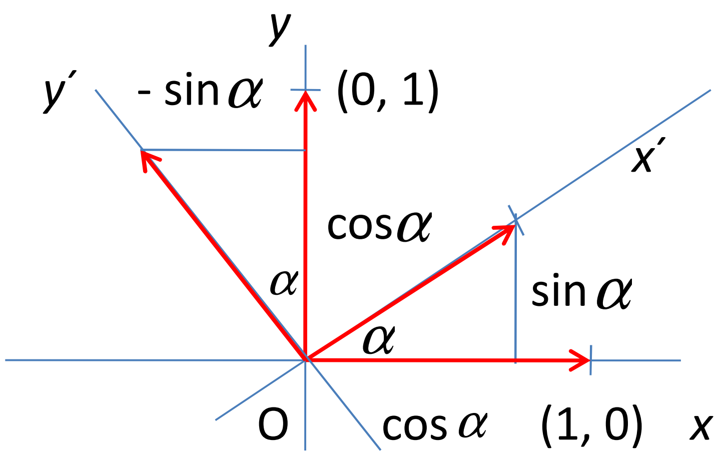
$$K_\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \quad K_\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Maticové vyjádření pro toto zobrazení proto bude:

$$K_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

.

.



.

.

.

.

.

Definice: Lineární zobrazení $Z: V \longrightarrow W$ se nazývá **izomorfní zobrazení** nebo **izomorfismus**, právě když je to zobrazení *prosté* a je *na*. Vektorové prostory V a W pak nazýváme **izomorfní**.

Příklady 5: R^1 je izomorfní s G_1, R^2 je izomorfní s G_2, R^3 je izomorfní s G_3.

Příklad 6: Izomorfní jsou např. vektorové prostory P_3 a $M_{2\times 2}$. Lze ukázat, že izomorfním zobrazením je např. zobrazení Z:

$$Z(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .$$

Skládání lineárních zobrazení

Definice: Předpokládejme, že Z a Q jsou dvě lineární zobrazení, přičemž $Z: V \longrightarrow W$ a $Q: W \longrightarrow U$. Pomocí těchto zobrazení můžeme definovat nové zobrazení $V \longrightarrow U$ takto:

Pro libovolný vektor ***v*** z V je Z(***v***) v prostoru W a Q(Z(***v***)) v prostoru U. Toto nové zobrazení se nazývá **složené zobrazení** ze Z a Q a značí se často $Z \circ Q$ nebo ZQ.

Příklad 7: Složíme následující dvě lineární zobrazení v R^2: osovou souměnost podle osy *o* mající rovnici *y = x* (první zobrazení) a osovou souměrnost podle osy *x* (druhé zobrazení).

Řešení: Osová souměrnost podle osy *o* označená O_o má matici A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a osová souměrnost podle osy *x* označená O_x má matici B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Jejich složení bude mít matici, která vznikne vynásobením matic A, B.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to B(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) \to (BA)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matici složeného zobrazení tedy dostaneme takto:

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maticové vyjádření složeného zobrazení je:

$$O_x O_o \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Pozor na pořadí matic při násobení!

Příklad 8: Energetická společnost produkuje uhlí a zemní plyn. Určitou část uhlí, kterou vytěží, spotřebuje sama a obdobně spotřebuje i určitou část vytěženého zemního plynu. Množství uhlí a zemního plyn, které vytěží za týden, budeme reprezentovat vektorem $\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}$, kde *u* je počet jednotek uhlí a *p* je počet jednotek plynu.

Tento vektor budeme nazývat *vektorem hrubé produkce*.
Množství uhlí a plynu, které se prodá během týdne, je určitou funkcí vektoru hrubé produkce. Proto definujeme $Z\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$, kde *s* je množství uhlí a *t* je množství plynu, které má společnost k prodeji za týden. Vektor $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ nazveme *vektorem čistého výkonu*. Zobrazení Z tak převádí vektor hrubé produkce na vektor čistého výkonu.
Předpokládejme tedy, že Z je lineární zobrazení.

Nechť v jednom týdnu jsou vektory $\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ tyto: $\begin{bmatrix} 1600 \\ 1200 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 900 \\ 700 \end{bmatrix}$ a v jiném týdnu tyto: $\begin{bmatrix} 2400 \\ 2000 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 1300 \\ 1200 \end{bmatrix}$.

Pak řešme problém, jaký bude vektor $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$, když společnost v daném týdnu vytěží $\begin{bmatrix} 2000 \\ 1600 \end{bmatrix}$.

Spočítáme, že platí: $\begin{bmatrix} 2000 \\ 1600 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1600 \\ 1200 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2400 \\ 2000 \end{bmatrix}$. Proto

$$Z\begin{bmatrix} 2000 \\ 1600 \end{bmatrix} = Z\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1600 \\ 1200 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2400 \\ 2000 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 900 \\ 700 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1300 \\ 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 950 \end{bmatrix}$$

Odpověď: V uvedeném týdnu bude mít společnost k prodeji 1100 jednotek uhlí a 950 jednotek plynu.