

9. Aplikace lineární algebry do analytické geometrie

V G_2 (G_3) Přímka procházející bodem X_0 a mající směr vektoru \mathbf{u} ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) má **parametrickou rovnici**

$$X = X_0 + t\mathbf{u}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}$$

Příklad: Napište parametrickou rovnici přímky procházející bodem $(3, -2)$ a mající směr vektoru $\mathbf{u} = (4, 5)$.

$$(x, y) = (3, -2) + t(4, 5) \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}$$

Tzn. $x = 3 + 4t$

$y = -2 + 5t$ Toto jsou **parametrické rovnice** přímky v souřadnicích.

Odtud $t = \frac{x-3}{4}$ a $t = \frac{y+2}{5}$, tedy $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{5}$ a úpravou

dostáváme **obecnou rovnici** přímky $5x - 4y - 23 = 0$.

Nechť \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou vektory z \mathbb{R}^3 , které jsou lineárně nezávislé (nejsou rovnoběžné). Rovina procházející bodem X_0 a rovnoběžná s vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} má **parametrickou rovnici**

$$X = X_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{R}$$

Příklad: Napište parametrickou rovnici roviny, která prochází bodem $(5, 1, 6)$ a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{u} = (2, 1, -3)$ a $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$.

Parametrická rovnice:

$$X = (5, 1, 6) + t(2, 1, -3) + s(1, 3, 2), \quad \text{kde } s, t \in \mathbb{R}$$

Vektorový součin vektorů v \mathbb{R}^3 .

Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. **Vektorovým součinem** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vektor

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Příklad: Nechť $\mathbf{u} = (1, -1, 3)$ a $\mathbf{v} = (0, 4, 2)$. Spočítejme vektorový součin vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} .

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-14, -2, 4)$$

Mnemotechnická pomůcka: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Vlastnosti vektorového součinu $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, r \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

anti – komutativnost

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$$

ortogonálnost $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ k \mathbf{u} a \mathbf{v}

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$$

levý distributivní zákon

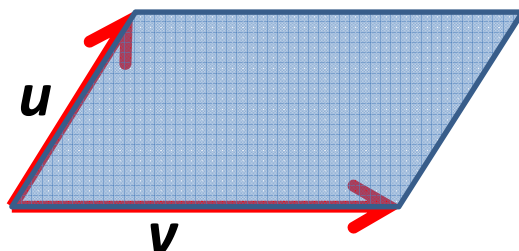
$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

pravý distributivní zákon

$$\mathbf{u} \times (r\mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

násobení skalárem

Délka vektoru $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, tzn. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ = obsah rovnoběžníka (viz obr.)



Vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je **ortogonální** k vektorům \mathbf{u} a \mathbf{v} .

Směr vektoru $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je určen pravidlem pravé ruky.

Problém: Určete rovnici roviny procházející body P(1, 3, -2), Q(1, 1, 5) a R(2, -2, 3).

Řešení:

Vektory $\overrightarrow{PQ} = (0, -2, 7)$ a $\overrightarrow{PR} = (1, -5, 5)$ jsou rovnoběžné s hledanou rovinou

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} = 25i + 7j + 2k = (25, 7, 2)$$

Vektor (25, 7, 2) je ortogonální k vektorům \overrightarrow{PQ} a \overrightarrow{PR} . Je tedy ortogonální k zadané rovině. Je to proto *normálový vektor* zadané roviny

$$25x + 7y + 2z = k$$

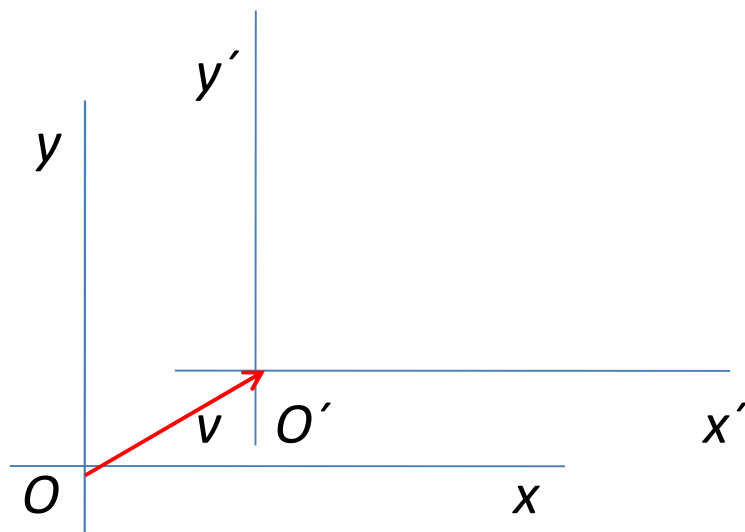
Protože rovina prochází bodem P, spočítáme k.

$$25 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 2(-2) = 42$$

Obecná rovnice roviny: $25x + 7y + 2z = 42$

Posunutí kartézské soustavy souřadnic

Je dána kartézská soustava souřadnic Oxy . Posuneme jí o vektor \mathbf{v} .
Dostaneme novou soustavu souřadnic $O'x'y'$



Každý vektor \mathbf{u} má v nové soustavě souřadnic stejné souřadnice jako v soustavě původní.

Jestliže pro vektor \mathbf{v} platí $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, pak pro souřadnice bodu $X(x, y)$ platí

$$x = x' + v_1$$

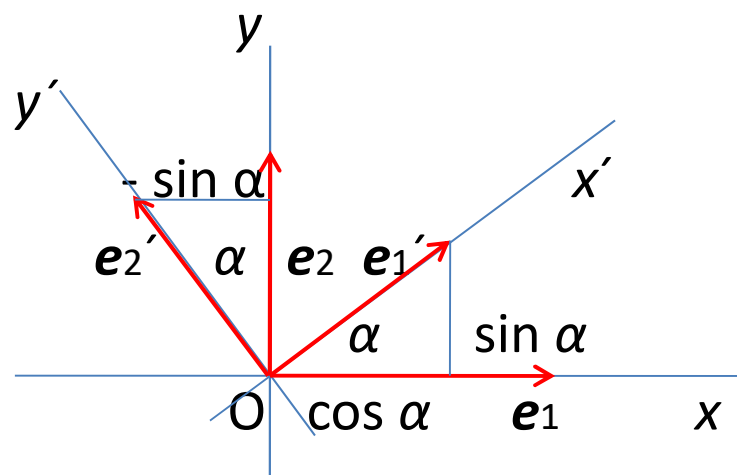
$$y = y' + v_2$$

Otočení kartézské soustavy souřadnic

V původní soustavě Oxy označme $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Potom pro bod $X = (x, y)$ platí

$$X = xe_1 + ye_2 = (x, y)$$

Soustavu Oxy otočíme kolem O o úhel α (viz obr.) a dostaneme soustavu $Ox'y'$.



Potom $e_{1'} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ a $e_{2'} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. Pro bod X v nových souřadnicích x', y' platí:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{viz Lineární zobrazení})$$