8 Vektorové prostory se skalárním součinem

Definice: Nechť V je vektorový prostor. **Skalární součin** ve V je zobrazení, která každé dvojici vektorů ***u***, ***v*** z V přiřadí číslo značené ***u.v*** tak, že jsou splněny následující axiómy:

$P_1)$ $(\forall \mathbf{u} \in \mathrm{V})(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{V})\, \mathbf{u.v} \in \mathrm{R}$

$P_2)$ $(\forall \mathbf{u} \in \mathrm{V})(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{V})\, \mathbf{u.v} = \mathbf{v.u}$

$P_3)$ $(\forall \mathbf{u} \in \mathrm{V})(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{V})\,(\forall \mathbf{w} \in \mathrm{V})\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}).\mathbf{w} = \mathbf{u.w} + \mathbf{v.w}$

$P_4)$ $(\forall \mathbf{u} \in \mathrm{V})(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{V})\,(\forall a \in \mathrm{R})\, a(\mathbf{u.v}) = (a\mathbf{u}).\mathbf{v}$

$P_5)$ $(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{V})\,(\mathbf{v} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v.v} > 0)$.

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá **vektorový prostor se skalárním součinem** nebo také **euklidovský vektorový prostor**.

Příklady:

Skalární součin vektorů v R^n :

Jestliže $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, pak

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n).(v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Skalární součin vektorů v $M_{2\times 2}$

Jestliže

A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a B = $\begin{bmatrix} x & y \\ u & w \end{bmatrix}$ jsou matice z $M_{2\times 2}$, pak

$$A.B = ax + by + cu + dw.$$

Skalární součin vektorů v P_2

Jestliže $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ a $q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$$p.q = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

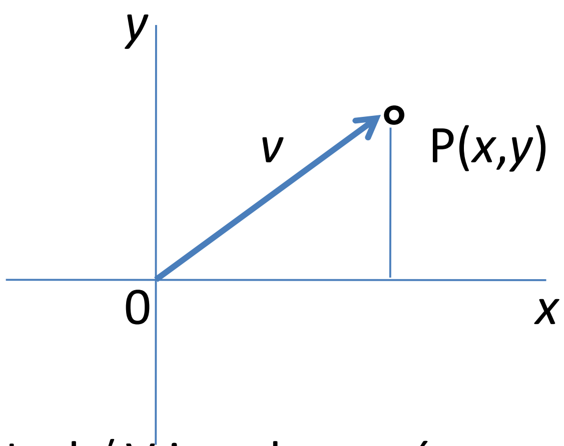
Z dřívějška víme:

Příklad: Uvažujme geometrický vektorový prostor G_2 šipek v rovině. Délku šipky ***v*** označíme $|\boldsymbol{v}|$. Pak skalární součin vektorů ***u*** a ***v*** definujeme následujícím způsobem:

$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u} = \begin{cases} |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{u}|\cos\alpha & \text{jestliže } \boldsymbol{v} \neq 0 \text{ a } \boldsymbol{u} \neq 0 \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Pokud je v této rovině zaveden souřadnicový systém a pro vektory ***u, v*** platí $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, pak se dá ukázat, že ***u.v*** počítáme tak, jak je uvedeno v R^2 tzn.

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = (u_1, u_2).(v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$



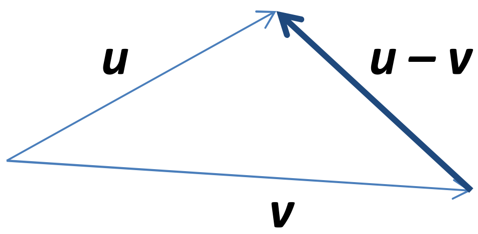
Definice: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Pak **normou** nebo **délkou** vektoru $\boldsymbol{v}$ z V, kterou budeme značit $|\boldsymbol{v}|$, je číslo

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\mathbf{v}.\mathbf{v}} \ .$$

Věta : Nechť $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ je vektor z vektorového prostoru V se skalárním součinem. Pak

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\ \boldsymbol{v}$$

je jednotkový vektor, který je kladným násobkem $\boldsymbol{v}$.



Definice: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a ***u*** a ***v*** jsou vektory z tohoto prostoru. Pak **vzdáleností** vektorů ***u*** a ***v***, kterou značíme d(***u***, ***v***), je

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| \, .$$

Nechť ***u***, ***v*** jsou vektory z vektorového prostoru V se skalárním součinem. Úhel α je jediný úhel, pro který platí:

1. $0 \leq \alpha \leq \pi$
2. $\cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|.|\boldsymbol{v}|}$.

Tento úhel se nazývá **úhel mezi vektory** ***u*** a ***v***.

Jestliže α = 0, pak jeden vektor je kladným násobkem druhého (mají stejný směr).

Jestliže $\alpha = \pi$, pak jeden vektor je záporným násobkem druhého. (mají opačné směry).

Hlavní důvod, proč zde hovoříme o úhlu mezi vektory, je však následující:

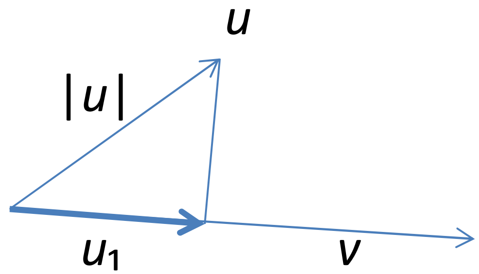
Nechť ***u*** a ***v*** jsou nenulové vektory a α je úhel mezi nimi. Pak úhel je pravý, právě když cos α = 0, což znamená, že ***u.v*** = 0. V tomto případě budeme říkat, že vektory ***u***, ***v*** jsou **ortogonální**.

Definice: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ je jeho podmnožina. Říkáme, že tato množina je **ortogonální** množina vektorů, právě když platí:

1. $\boldsymbol{e}_i \neq 0$
2. $\boldsymbol{e}_i . \boldsymbol{e}_j = 0$, pro $i \neq j$.

Pokud navíc platí: $|\boldsymbol{e}_i| = 1$, pak se tato množina nazývá **ortonormální**.

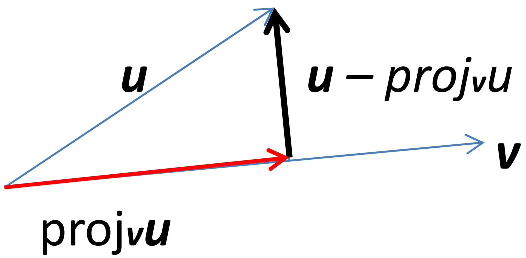
Pokud je báze vektorového prostoru ortogonální nebo ortonormální množina, pak mluvíme o **ortogonální** nebo **ortonormální bázi**.



Pro vektor $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \neq 0$ se $\boldsymbol{u}_1$ nazývá **projekce** $\boldsymbol{u}$ do $\boldsymbol{v}$ a počítáme ji následovně:

$$\mathrm{proj}_v u = u_1 = \frac{u \cdot v}{|v| \cdot |v|} v$$

Příklad: V R^3 $\boldsymbol{u} = (-1, 0, -2)$ a $\boldsymbol{v} = (3, 1, 1)$. Pak $\mathrm{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{|v| \cdot |v|} v = \frac{-5}{11}(3, 1, 1)$



vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u} - \mathrm{proj}_v \boldsymbol{u}$ jsou ortogonální

Gram-Schmidtův algoritmus:

Nechť $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V se skalárním součinem. Následujícím způsobem obdržíme ortogonální bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ prostoru V.

$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1$

$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{u}_2 = u_2 - \dfrac{u_2.e_1}{e_1.e_1}e_1$

$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \mathrm{proj}_{e_1}\boldsymbol{u}_3 - \mathrm{proj}_{e_2}\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \dfrac{u_3 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1}e_1 - \dfrac{u_3 \cdot e_2}{e_2 \cdot e_2}e_2$

-

$e_n = u_n - \mathrm{proj}_{e_1}u_n - \mathrm{proj}_{e_2}u_n - \ldots - \mathrm{proj}_{e_{n-1}}u_n$

Příklad: Užijte Gram – Schmidtův algoritmus k vytvoření ortogonální báze.

$U = [\{\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, -1, -1), \boldsymbol{u}_2 = (3, 2, 0, 1), \boldsymbol{u}_3 = (1, 0, 1, 0)\}]$

$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1, 1, -1, -1)$

$\boldsymbol{e}_2 = u_2 - \dfrac{u_2.e_1}{e_1.e_1}e_1 = (3, 2, 0, 1) - 4/4.(1, 1, -1, -1) = (2, 1, 1, 2)$

$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \dfrac{u_3 \cdot e_1}{e_1 e_1}e_1 - \dfrac{u_3\, e_2}{e_2\, e_2}e_2 = \boldsymbol{u}_3 - 0/4.\boldsymbol{e}_1 - 3/10.\boldsymbol{e}_2 = 1/10\,.(4, -3, 7, -6)$