7. Důležité pojmy ve vektorových prostorech

Definice: Nechť V je vektorový prostor a množina vektorů $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je podmnožinou V. Pak součet skalárních násobků těchto vektorů, tj.

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n\,,$$

kde $a_i \in R$, se nazývá **lineární kombinace vektorů** $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$. Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty** lineární kombinace.

Příklad: Nechť $\boldsymbol{u} = (2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (4, -2)$ z R^2, pak $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = (14, -1)$. Vektor $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Definice: Nechť V je vektorový prostor a množina $M = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je množina z V. Pokud se každý vektor z V dá zapsat ve tvaru

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

pak se množina M nazývá **množinou generátorů** prostoru V a vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ se nazývají **generátory.**

Příklad: Uvažujme aritmetický vektorový prostor R^3. Pak platí, že množina $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ je množinou generátoru prostoru R^3, pokud $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ a $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Řešení: Libovolný vektor (a, b, c) z R^3 můžeme zapsat ve tvaru

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

Dodejme, že množinou generátorů může být např. i množina

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, -7, 11)\},$$

neboť

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) + 0.(2, -7, 11).$$

Množina $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ již negeneruje R^3.

Pokud je M množinou generátorů vektorového prostoru V, píšeme [M] = V.

Množina [M] se někdy v matematické literatuře nazývá **lineární obal množiny** M.

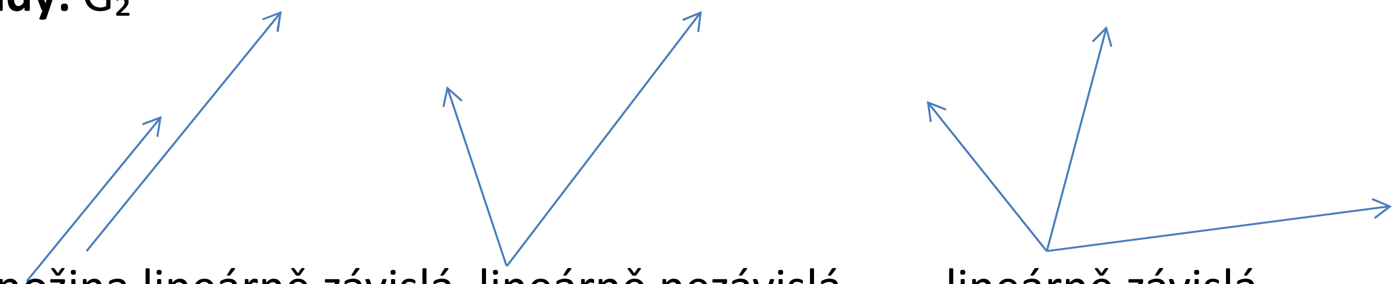
Definice: Množina vektorů $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ z vektorového prostoru V se nazývá <u>**lineárně nezávislá**</u>, právě když

$$(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathrm{R})\,[a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge \ldots \wedge a_n = 0)],$$

<u>**lineárně závislá**</u>, právě když

$$(\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathrm{R})\,[a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \wedge (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee \ldots \vee a_n \neq 0)].$$

Příklady: G_2



množina lineárně závislá lineárně nezávislá lineárně závislá

Příklad: Ukažme**,** že množina vektorů {(2, 1, 2), (1, 0, -1), (3, -2, 0)} z prostoru R^3 je lineárně nezávislá.

Řešení: Předpokládejme, že lineární kombinace uvedených vektorů dává nulový vektor a vypočítáme, jaké musí být koeficienty této lineární kombinace.

$$a_1(2, 1, 2) + a_2\,(1, 0, -1) + a_3(3.\ -2, 0) = (0, 0, 0)$$

Dostaneme následující soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \\ a_1 \qquad - 2a_3 &= 0 \\ 2a_1 - a_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme: $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$.

Množina {(2, 1, 2), (1, 0, -1), (3. -2, 0)} je tedy skutečně lineárně nezávislá.

Příklad: Zjistěte, zda množina vektorů {(1, 0, 2), (-2, 1, 1), (4, -1, 3)} z vektorového prostoru R^3 je lineárně nezávislá.

Řešení: Opět budeme předpokládat, že lineární kombinace uvedených vektorů dává nulový vektor a vypočítáme, jaké musí být koeficienty:

$$a_1(1, 0, 2) + a_2(-2, 1, 1) + a_3(4, -1, 3) = (0, 0, 0)$$

Dostaneme soustavu :

$$\begin{aligned} a_1 - 2a_2 + 4a_3 &= 0 \\ a_2 - a_3 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dostaneme jednoparametrický systém řešení:

$$(a_1, a_2, a_3) = t(2, -1, -1), \text{ kde } t \in R.$$

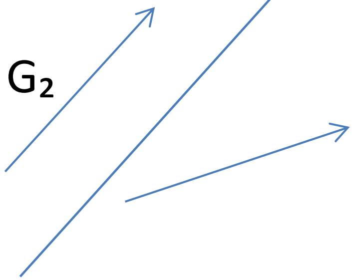
Pokud za parametr dosadíme např. číslo 1, dostaneme jedno partikulární (konkrétní) řešení, tj. trojici (2, -1, -1). Takže vidíme, že platí:

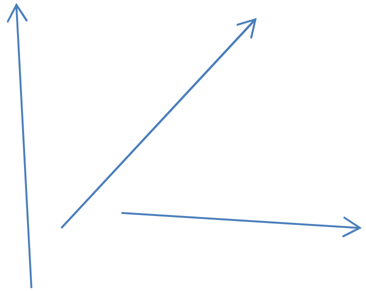
$$2(1, 0, 2) - (-2, 1, 1) - (4, -1, 3) = (0, 0, 0).$$

Odpověď: Množina vektorů {(1, 0, 2), (-2, 1, 1), (4, -1, 3)} je proto lineárně závislá.

Věta : Množina vektorů $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ z vektorového prostoru V, kde $n > 1$, je lineárně závislá, právě když aspoň jeden vektor z nich je lineární kombinací ostatních.

Příklady v G_2





Bohužel, věta nehovoří o tom, který z vektorů je lineární kombinací ostatních.

Důkaz: Věta má stavbu ekvivalence, a proto bude mít její důkaz dvě části.

1. Předpokládejme, že např. vektor $\boldsymbol{v}_1$ je lineární kombinací ostatních, tzn.

$$\boldsymbol{v}_1 = a_2\boldsymbol{v}_2 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n.$$

Převedeme-li všechny vektory na jednu stranu rovnosti, dostaneme:

$$\underline{1}.\boldsymbol{v}_1 - a_2\boldsymbol{v}_2 - a_2\boldsymbol{v}_2 - \ldots - a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

Z vektorů $\boldsymbol{v}_i$ jsme pomocí lineární kombinace vytvořili nulový vektor, a přitom nejsou všechny koeficienty nulové (viz koeficient u $\boldsymbol{v}_1$). Množina vektorů $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je proto lineárně závislá.

2. Předpokládejme, že množina $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ je lineárně závislá. To ale znamená, že existuje netriviální lineární kombinace, pro kterou platí:

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

Předpokládejme, že nenulovým koeficientem je a_1. Pak po úpravě dostaneme

$$\boldsymbol{v}_1 = (-a_2/a_1)\boldsymbol{v}_2 + (-a_2/a_1)\boldsymbol{v}_2 + \dots + (-a_n/a_1)\,\boldsymbol{v}_n.$$

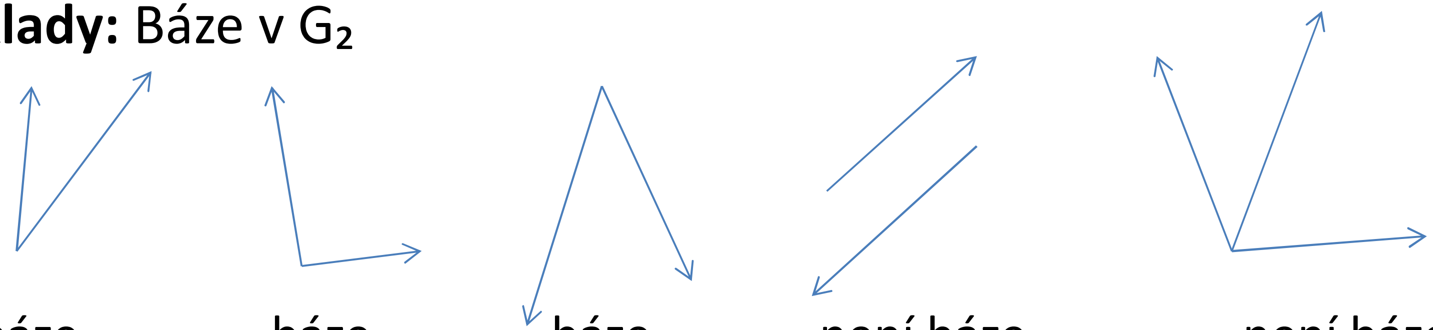
Vektor $\boldsymbol{v}_1$ je tedy lineární kombinací ostatních vektorů.

Definice: Podmnožina B množiny V se nazývá **báze** vektorového prostoru V, právě když splňuje následující dvě podmínky:

1. B je množina generátorů prostoru V, tzn. [B] = V,
2. B je lineárně nezávislá množina.

Věta: Všechny báze vektorového prostoru V mají stejný počet vektorů.

Příklady: Báze v G_2



báze báze báze není báze není báze

Nejjednodušší báze:

báze R^2 = ?, báze R^3 = ?, báze $M_{2,2}$ = ?, báze P3 = ?, báze P = ?

Definice: Počet vektorů libovolné báze vektorového prostoru V se nazývá **dimenze** tohoto prostoru a značí se dim V. Pokud je množina vektorů v bázi konečná, říkáme, že má prostor V **konečnou dimenzi**.

Příklady:

dim G_2 = 2, dim G_3 = 3, dim R^2 = 2, dim R^3 = 3, dim $M_{2,2}$= 4, dim P_3 = 4,

dim P = ?

Hodnost matice A je počet vedoucích jedniček v zubaté formě matice A.

Hodnost matice A je maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů matice A.

Tyto vektory tvoří bázi řádkového prostoru matice A, a proto jejich počet určuje jeho dimenzi. **Hodnost matice** A je dimenze řádkového prostoru matice A.

Věta:

Dimenze řádkového i sloupcového prostoru matice A jsou si rovny.

Věta (Frobeniova): Uvažujme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých. Tato soustava má aspoň jedno řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Důkaz: Nechť je dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých x_1, x_2, …x_n

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\ .
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Matice S má hodnost *h*:

$$
S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Matice rozšířená R má hodnost *h´*:

$$
R = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right]
$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots\dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Vlastní důkaz:

1) Předpokládejme, že soustava (1) má řešení. Je jím uspořádaná n-tice $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Pokud do (2) dosadíme za x_i řešení r_i, bude soustava splněna. To však znamená, že vektor prvé strany $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je lineární kombinací ostatních sloupcových vektorů. Vložíme-li tento sloupec do matice soustavy S, obdržíme rozšířenou matici soustavy R. Protože se ale dimenze vzniklého sloupcového prostoru nezmění, platí $h = h'$.

2) Nyní obráceně. Předpokládejme, že hodnosti matic S a R jsou stejné, tzn. $h = h'$. Protože rozšířená matice soustavy R vznikne z matice soustavy S přidáním sloupce pravých stran $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$, musí být tento sloupec lineární kombinací sloupců matice soustavy S. Označíme-li koeficienty této lineární kombinace $r_1, r_2, \ldots, r_n$, je uspořádaná n-tice $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ řešením soustavy (1).