5. Geometrické vektorové prostory

Některé kvantity jsou specifikovány jedním číslem zvaným velikost (této kvantity). To je např. *délka*, *čas* nebo *teplota*. Takovéto kvantity se nazývají **skalární** kvantity. Ke specifikaci některých jiných kvantit však musíme vedle velikosti udat i směr. Takovou kvantitou je např. *síla*. Je důležité vědět nejen to, jak je veliká, ale také to, jakým směrem působí. Obdobně je tomu třeba u *rychlosti*, *zrychlení* nebo u *posunutí*. Takovéto kvantity se nazývají **vektorové** kvantity.

Vektorové kvantity často znázorňujeme pomocí **šipek**.

G_1 prostor šipek na přímce

G_2 prostor šipek v rovině

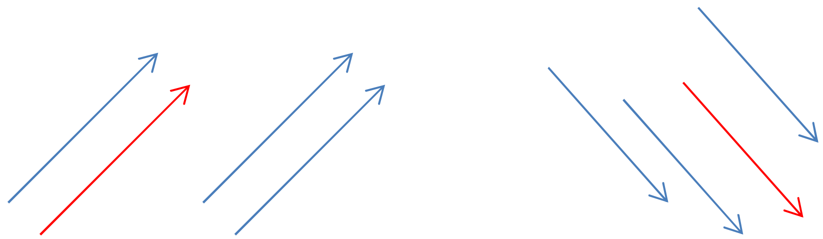
G_3 prostor šipek v trojrozměrném prostoru

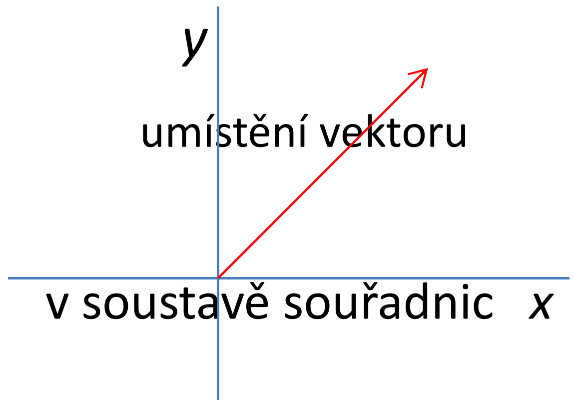
Budeme pracovat v G_2. V G_1 a G_3 je to analogické.

Velikost vektoru ***v*** budeme značit |***v***|. Je to nezáporné číslo a je vyjádřeno délkou šipky. **Směr** vektoru ***v*** je samozřejmě šipkou určen také.

Dvě šipky představují **stejný vektor**, právě když

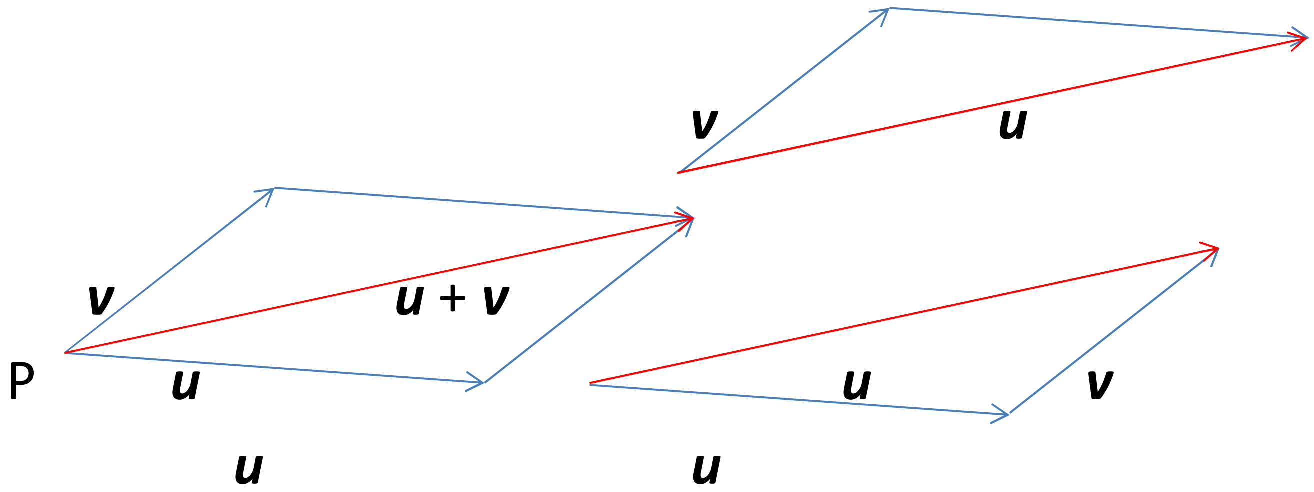
1. mají stejnou velikost,
2. mají stejný směr.





V dalším se nám bude hodit uvažovat i vektor, který má nulovou délku. Bude vyjádřen bodem a budeme ho nazývat **nulovým vektorem**. Nulový vektor nemá směr.

Sčítání vektorů. Použijeme k tomu tzv. *rovnoběžníkové pravidlo*. Nechť ***u***, ***v*** jsou dva vektory. Umístíme je tak, aby měly společný počáteční bod P. Tyto vektory pak tvoří sousední strany rovnoběžníka. Úhlopříčka vycházející z bodu P představuje součet ***u*** + ***v*** (viz obr. 2 a)).



u + ***v*** = ***v*** + ***u***

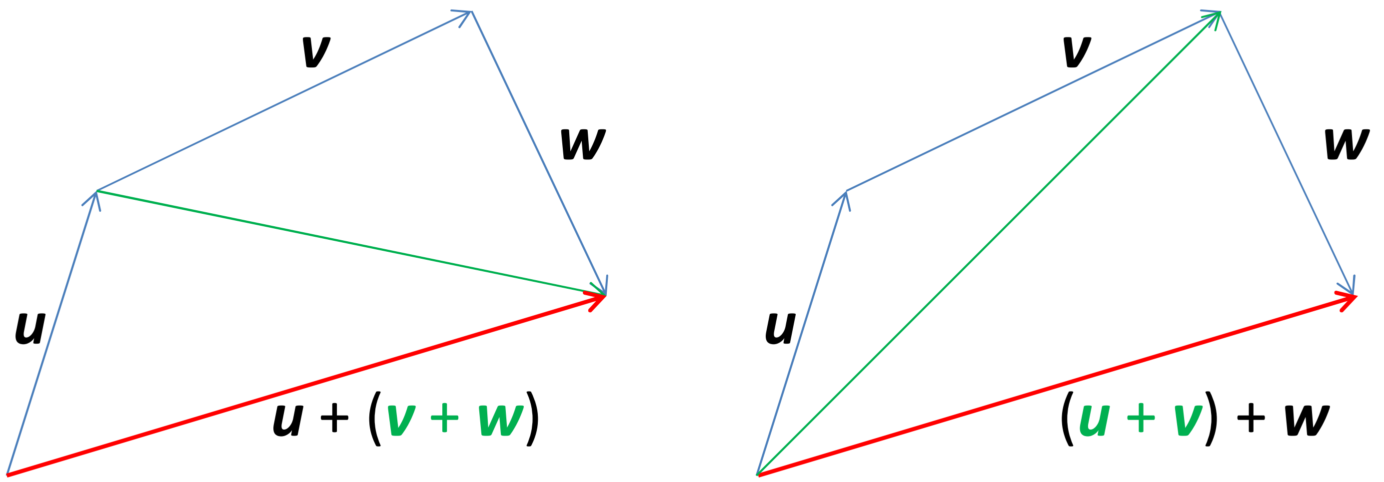
Množina všech vektorů z G spolu s operací sčítání tvoří algebraickou strukturu, kterou označíme (G, +).

Tato struktura má následující vlastnosti:

- $(\forall u \in \mathrm{G})(\forall v \in \mathrm{G})\, u + v \in \mathrm{G}$ uzavřenost G
- $(\forall \mathbf{u} \in \mathrm{G})(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{G})(\forall \mathbf{w} \in G)$ $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ asociativnost
- $(\exists \mathbf{n} \in \mathrm{G})(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{G})$ $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ nulový vektor
- $(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{G})(\exists \mathbf{u} \in \mathrm{G})$ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ opačný vektor
- $(\forall \mathbf{u} \in \mathrm{G})(\forall \mathbf{v} \in \mathrm{G})\, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ komutativnost

Grafické zdůvodnění asociativnosti sčítání:

$$(\forall \mathbf{u} \in G)(\forall \mathbf{v} \in G)(\forall \mathbf{w} \in G)\ \boldsymbol{u} + (\underline{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}}) = (\underline{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}}) + \boldsymbol{w}$$



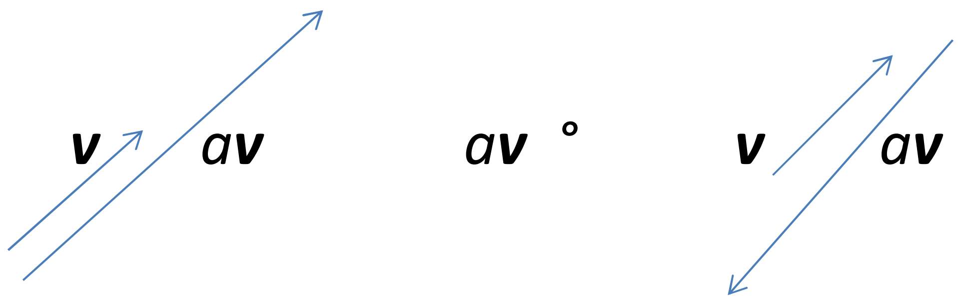
Násobení vektoru skalárem (číslem).

Nechť je vektor $\boldsymbol{v} \in G$ a skalár $a \in R$ (R je množina všech reálných čísel) , pak vektor $a\boldsymbol{v}$ definujeme následujícím způsobem:

Pro velikost vektoru $a\boldsymbol{v}$ platí: $|a\boldsymbol{v}| = |a|.|\boldsymbol{v}|$

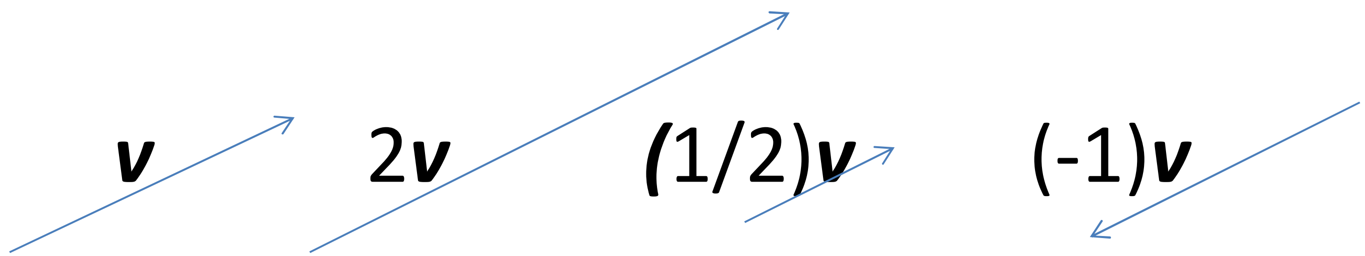
Pro směr vektoru $a\boldsymbol{v}$ platí (viz obr.):

Směr vektoru $a\boldsymbol{v}$ je
- stejný jako vektoru $\boldsymbol{v}$, pokud $a > 0$ a $\boldsymbol{v} \neq 0$
- není určen, pokud $a = 0$ nebo $\boldsymbol{v} = 0$
- opačný k $\boldsymbol{v}$, pokud $a < 0$ a $\boldsymbol{v} \neq 0$.



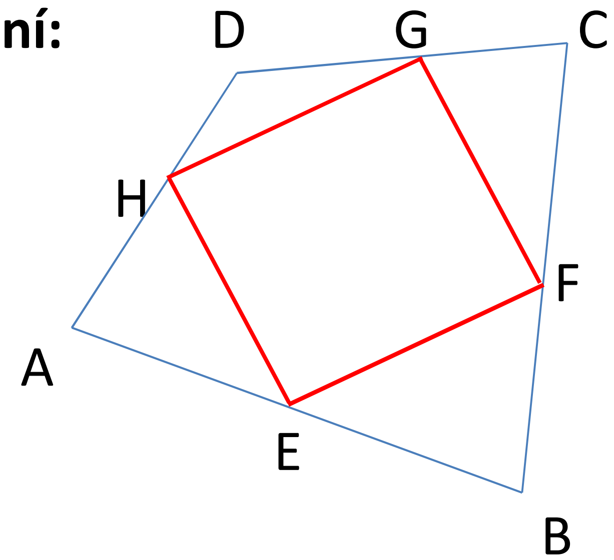
Násobení skalárem má následující vlastnosti:

- $(\forall v \in \mathrm{G})(\forall a \in \mathrm{R})\ av \in \mathrm{G}$ uzavřenost G
- $(\forall u \in \mathrm{G})(\forall v \in \mathrm{G})(\forall a \in \mathrm{R})\ a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
- $(\forall v \in \mathrm{G})(\forall a \in \mathrm{R})(\forall b \in \mathrm{R})\ (a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$
- $(\forall v \in \mathrm{G})(\forall a \in \mathrm{R})(\forall b \in \mathrm{R})\ (ab)\boldsymbol{v} = a(b\boldsymbol{v})$
- $(\forall v \in \mathrm{G})\ 1.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$



Problém: Nechť je dán čtyřúhelník ABCD a EFGH jsou po řadě středy jeho stran (viz obr.). Spojíme-li „sousední“ středy, dostaneme rovnoběžník. Dokažte.

Řešení:



Stačí dokázat, že vektor $\overrightarrow{HG}$ se rovná vektoru $\overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = ½.\ \overrightarrow{AD} + ½\ \overrightarrow{DC} = ½(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = ½.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = ½.\overrightarrow{AB} + ½.\overrightarrow{BC} = ½(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = ½.\overrightarrow{AC}$

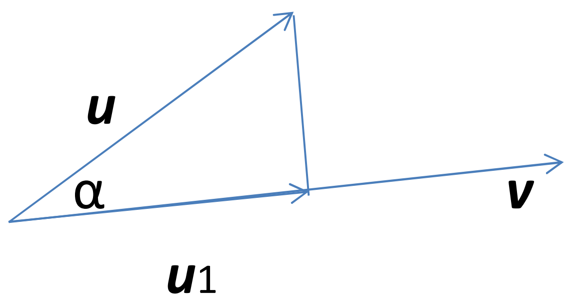
$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$

Uvažujme geometrický vektorový prostor G_2 šipek v rovině. **Skalární součin** vektorů ***u*** a ***v*** budeme definovat následujícím způsobem:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = \begin{cases} |\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{u}|\cos\alpha, & \text{jestliže } \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \text{ a } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pokud je v této rovině zaveden souřadnicový systém a pro vektory ***u***, ***v*** platí $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, pak se dá ukázat, že ***u.v*** počítáme:

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = (u_1, u_2).(v_1, v_2) = u_1v_1 + u_2v_2 .$$



$$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{v}|\cos\alpha$$

$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{v}|.|\boldsymbol{u}_1|$$

Definice: Nechť G je vektorový prostor. Skalární součin v G je zobrazení, která každé dvojici vektorů ***u***, ***v*** z G přiřadí číslo značené ***u.v*** tak, že jsou splněny následující axiómy:

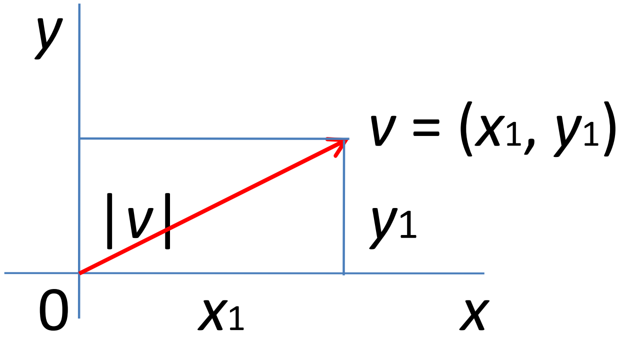
$P_1)\ (\forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{G})(\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{G})\ \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}$

$P_2)\ (\forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{G})(\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{G})\ \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$

$P_3)\ (\forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{G})(\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{G})\ (\forall \boldsymbol{w} \in \mathrm{G})\ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}$

$P_4)\ (\forall \boldsymbol{u} \in \mathrm{G})(\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{G})\ (\forall a \in \mathrm{R})\ a(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) = (a\boldsymbol{u}).\boldsymbol{v}$

$P_5)\ (\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{G})\ (\boldsymbol{v} \neq 0\ \Rightarrow \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} > 0)$



$$|v| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{v.v}$$

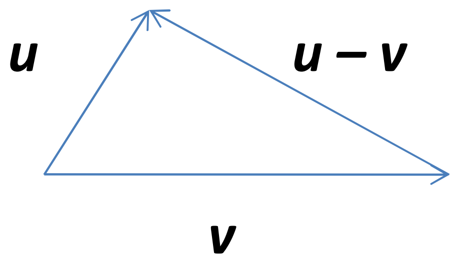
Definice: Nechť G2 je vektorový prostor se skalárním součinem. Pak **normou** nebo **délkou** vektoru ***v*** z V, kterou budeme značit |***v***|, je číslo $|v| = \sqrt{v.v}$

Vektor ***v*** z V se nazývá **jednotkový**, právě když |***v***| = 1.

Příklad: Jestliže ***v*** = (2, -3) z G2, pak $|v| = \sqrt{v.v}$ = $\sqrt{2.2 + (-3)(-3)}$ = $\sqrt{13}$

Jednotkový je vektor ***v*** = $(1/\sqrt{13})(2, -3)$.

•



$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$

Definice: Nechť G_2 je vektorový prostor se skalárním součinem a $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou vektory z tohoto prostoru. Pak **vzdáleností** vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, kterou značíme $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, je

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| \ .$$

Příklad : Nechť $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ a $\boldsymbol{v} = (3, 4)$ jsou dva vektory z G_2. Pak

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = |(1, 1) - (3, 4)| = |(-2, -3)| = \sqrt{13} \ .$$

Nechť ***u***, ***v*** jsou z G_2 . Úhel α je úhel, pro který platí:

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\cos \alpha = \frac{u.v}{|u|.|v|}.$$

Tento úhel α se nazývá **úhel mezi vektory *u*** a ***v***.

- Jestliže $\alpha = 0$, pak jeden vektor je kladným násobkem druhého (mají stejný směr).
- Jestliže $\alpha = \pi$, pak jeden vektor je záporným násobkem druhého. (mají opačné směry).

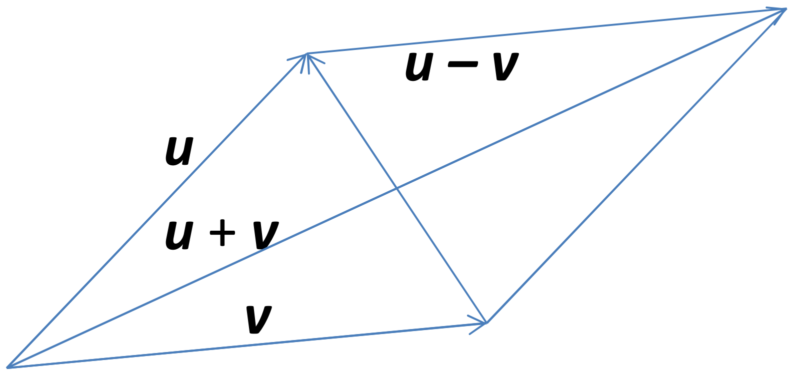
Hlavní důvod, proč zde hovoříme o úhlu mezi vektory, je však následující:

- Nechť ***u*** a ***v*** jsou nenulové vektory a α je úhel mezi nimi. Pak úhel α je pravý, právě když cos α = 0, což znamená, že ***u.v*** = 0. V tomto případě budeme říkat, že vektory ***u***, ***v*** jsou **ortogonální**.

Příklad: ***u*** = (3, 1), ***v*** = (-2, 6), ***u.v*** = 3(-2) + 1.6 = 0, ***u,v*** jsou ortogonální .

Příklad: Dokažte, že úhlopříčky v kosočtverci jsou navzájem ortogonální (kolmé).

Řešení: Nechť $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou vektory odpovídající dvěma sousedním stranám kosočtverce (viz obrázek). Pak úhlopříčky jsou $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Spočítejme jejich skalární součin.



$$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}).(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \qquad \text{distributivnost}$$

$$= \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = \qquad \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$$

$$= |\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 = 0 \qquad |\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$$