2. Matice

Algebra matic

Maticí rozumíme obdélníkové schéma. Pokud má toto schéma *m* řádků a *n* sloupců, pak mluvíme o matici **typu *m × n***. V tuto chvíli uděláme úmluvu, že všech *m.n* míst v matici bude vždy obsazeno reálnými čísly (někdy to mohou být i proměnné pro tato čísla). Proto se někdy říká matice nad reálnými čísly. Těmto číslům pak budeme říkat **složky** matice (matematici někdy říkají prvky matice).

Matice typu 3 x 4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Definice: Dvě matice A = (a_{ij}) a B = (b_{ij}) jsou si **rovny**, právě když jsou stejného typu a odpovídající složky jsou si rovny.

Symbolicky: $(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, pro každé i, j.

Definice: Nechť matice A = (a_{ij}) a B = (b_{ij}) jsou stejného typu. Pak **součtem** A + B je matice stejného typu, jejíž složky obdržíme sečtením odpovídajících složek matic A a B.

Symbolicky: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ pro každé i, j.

Definice: Nechť A = (a_{ij}) je matice a k je reálné číslo. **Vynásobit** matici A **skalárem** k, což zapíšeme kA, znamená vynásobit skalárem k každou složku matice A.

Symbolicky: $k\mathrm{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$ pro každé i, j.

Věta : Nechť matice A, B, C jsou typu $m \times n$ a k a l jsou libovolná reálná čísla. Pak platí:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ asociativnost sčítání
2. Matice má takovou vlastnost, že pro každou matici A platí:

   $A + 0 = 0 + A = A$ existence nulové matice
3. Pro každé A existuje matice -A taková, že

   $A + (-A) = (-A) + A = 0$ existence opačné matice
4. $A + B = B + A$ komutativnost sčítání
5. $k(A + B) = kA + kB$ „míchaná“ distributivnost
6. $(k + l)A = kA + lA$ „míchaná“ distributivnost
7. $(kl)A = k(lA)$ „míchaná“ asociativnost
8. $1A = A$ vlastnost čísla 1

Definice: Nechť $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jsou uspořádané n-tice reálných čísel. Pak se číslo

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

nazývá **skalární součin** n-tic $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Definice: Nechť A je matice typu $m \times k$ a B je matice typu k x n. Pak jejich **součin** AB je matice typu m x n. Její každá (i,j)-složka vznikne jako skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.

Zapišme ideu definice schematicky: Nechť matice A = (a_{ij}), B =(b_{ij}) a A**.**B = C = (c_{ij}).

$$\text{kde } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Násobení matic:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & j & & & j \\ i & \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{ik} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ - \\ - \\ b_{kj} \end{bmatrix} & = & i & \begin{bmatrix} \\ c_{ij} \\ \\ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Jednotková (identická) matice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .....

Věta : Nechť *k* je skalár a A, B, C, I jsou matice takového typu, že následující operace lze provést. Pak platí:

I.A = A , B.I = B	jednotková matice
(AB)C = A(BC)	asociativnost násobení
A(B + C) = AB + AC	distributivnost
(A + B)C = AC + BC	distributivnost
k(AB) = (*k*A)B = A(*k*B)	násobení součinu skalárem.

Aplikace násobení matic

Problém: Zapište následující soustavu rovnic pomocí matic:

$$2x + y - z = 3$$
$$3x - y + 4z = 7$$

Řešení: Uvedenou soustavu můžeme zapsat pomocí rovnosti dvou matic typu 2x1 takto:

$$\begin{bmatrix} 2x + y - z \\ 3x - y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Rozložíme na součin

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & +4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Obecně: <u>Ax = b</u>, A je matice koeficientů, x matice neznámých, b matice pravých stran. <u>Ax = 0</u> asociovaná homogenní soustava